第二章 一元二次函数、方程和不等式

模块一 不等式与二次函数

第 1 节 不等式的性质、一元二次方程与不等式（★★）

内容提要

本节包含不等式性质、一元二次不等式、一元二次方程根的分布三部分内容.

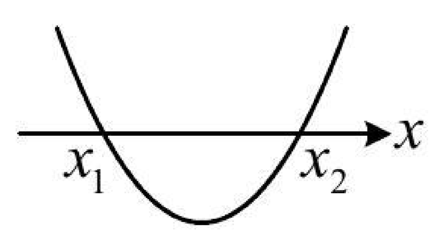
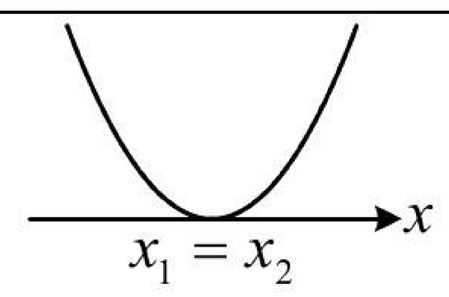
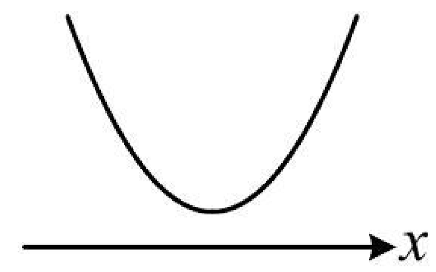
1．不等式的性质

①对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$；②传递性：$a>b$ 且 $b>c\Rightarrow a>c$；③可加性：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$；

④可乘性：$a>b$ 且 $c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b$ 且 $c<0\Rightarrow ac<bc$；⑤同向可加性：$a>b$ 且 $c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

⑥同向同正可乘性：$a>b>0$ 且 $c>d>0\Rightarrow ac>bd$；⑦可乘方性：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

2．二次函数与一元二次方程、不等式的解（以平方项系数 $a>0$ 为例）

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象			
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根	两个不等实根 x_1 和 $x_2(x_1<x_2)$	两个相等的实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq-\dfrac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

3．根据一元二次方程在某区间上根的情况求参：

①若只说有根，没规定根的个数，则考虑参变分离，再对变量一侧求值域，即可得到参数的范围.

②若规定了根的个数，则常画出二次函数的图象，考虑判别式、对称轴、端点值.

典型例题

类型Ⅰ：用不等式性质判断不等式是否正确

【例 1】下列说法正确的是（　　）

（A）若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$　　　　（B）若 $a>b$，$c>d$，则 $a-c>b-d$

（C）若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$　　　　（D）若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$

解析： A 项，当 $c=0$ 时，$ac^2=bc^2$，故 A 项错误；

B 项，同向不等式可以相加，但不能相减，所以 B 项不对，下面举个反例，

取 $a=2$，$b=1$，$c=3$，$d=1$，则 $a-c=-1<b-d=0$，故 B 项错误；

C 项，同向同正的不等式才可以相乘，条件中没有同正，所以不对，下面举个反例，

取 $a=1$，$b=0$，$c=-1$，$d=-2$，则 $ac=-1<bd=0$，故 C 项错误；

D 项，根据同向不等式的可加性，由 $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}$ 可得 $a+c>b+d$，故 D 项正确.

答案： D

【反思】取特值检验不等式只能结合排除法用. 若将特值代入不等式不成立，则此选项必定错误；反之，若特值满足不等式，该不等式却不一定恒成立. 例如，本题的选项 B 中，若取 $a=4$，$b=1$，$c=0$，$d=-1$，则满足 $a-c>b-d$，但此不等式不是恒成立的.

【例 2】（多选）已知 $a>b>0>c$，则下列不等关系正确的是（　　）

（A）$\dfrac{b-c}{a-c}<\dfrac{b}{a}$　　（B）$\dfrac{b-c}{a}<\dfrac{a-c}{b}$　　（C）$a(c+2)>b(c+2)$　　（D）$ab+c^2>ac+bc$

解法 1：给出了 $a>b>0>c$，可考虑由此取特值来检验选项，用排除法选答案，

取 $a=2$，$b=1$，$c=-2$，则 $\dfrac{b-c}{a-c}=\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{b-c}{a-c}>\dfrac{b}{a}$，故 A 项错误；

又 $a(c+2)=b(c+2)=0$，所以 C 项错误，此题为多选题，故选 BD.

解法 2：A 项，直接观察不易判断是否正确，可作差比较，$\dfrac{b-c}{a-c}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a(b-c)-b(a-c)}{(a-c)a}=\dfrac{(b-a)c}{(a-c)a}$，

因为 $a>b>0>c$，所以 $b-a<0$，$a-c>0$，故 $\dfrac{b-c}{a-c}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{(b-a)c}{(a-c)a}>0$，所以 $\dfrac{b-c}{a-c}>\dfrac{b}{a}$，故 A 项错误；

B 项，$\dfrac{b-c}{a}-\dfrac{a-c}{b}=\dfrac{b(b-c)-a(a-c)}{ab}=\dfrac{b^2-bc-a^2+ac}{ab}=\dfrac{(b+a)(b-a)-c(b-a)}{ab}=\dfrac{(b-a)(b+a-c)}{ab}$，

因为 $a>b>0>c$，所以 $ab>0$，$b-a<0$，$b+a-c>0$，故 $\dfrac{b-c}{a}-\dfrac{a-c}{b}=\dfrac{(b-a)(b+a-c)}{ab}<0$，

所以 $\dfrac{b-c}{a}<\dfrac{a-c}{b}$，故 B 项正确；

C 项，此选项即为在 $a>b$ 两端同乘以了 $c+2$，当 $c<0$ 时 $c+2$ 可能可负，若为负，则 $a(c+2)<b(c+2)$，故 C 项错误；

D 项，$ab+c^2-(ac+bc)=a(b-c)+c(c-b)=(b-c)(a-c)$，因为 $a>b>0>c$，所以 $b-c>0$，$a-c>0$，

故 $ab+c^2-(ac+bc)=(b-c)(a-c)>0$，所以 $ab+c^2>ac+bc$，故 D 项正确.

答案：BD

【总结】①判断不等式是否成立这类题，特值法是取巧的办法，而若要推证，则应严格按照内容提要中所列的几条不等式的性质来进行等价变形；②当两个数无法直接看出大小时，不妨考虑作差比较.

类型Ⅱ：一元二次函数、方程、不等式的关系

【例 3】不等式 $x^2+3x-4\ge 0$ 的解集为（　　）

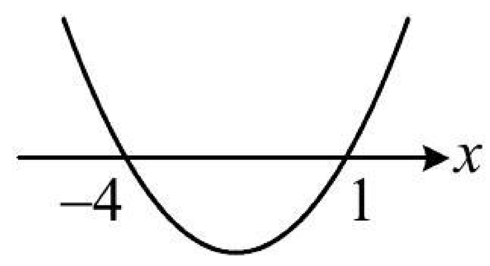
（A）$(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$　　（B）$(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$　　（C）$(-4,1)$　　（D）$[-4,1]$

解析：要解一元二次不等式，先解对应的一元二次方程，再画出对应的二次函数的大致图象来看，

由 $x^2+3x-4=0$ 可得 $(x+4)(x-1)=0$，解得：$x=-4$ 或 1，所以二次函数 $y=x^2+3x-4$ 的大致图象如图，

故不等式 $x^2+3x-4\ge 0$ 的解集为 $(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$.

答案：B



【反思】上面的过程给出了解一元二次不等式的基本原理，熟练后可直接将 x^2+3x-4 分解因式，再取解集即可，本节后续题目解析将不再阐释上述原理.

【变式 1】若关于 x 的不等式 $x^2-(m+3)x+3m<0$ 的解集中恰有 2 个整数，则实数 m 的取值范围是_____.

解析： $x^2-(m+3)x+3m<0 \Leftrightarrow (x-3)(x-m)<0$，两根中 m 与 3 的大小不确定，需讨论，

当 $m=3$ 时，$(x-3)(x-m)<0$ 即为 $(x-3)^2<0$，无解，不合题意；

当 $m>3$ 时，$(x-3)(x-m)<0$ 的解集为 $(3,m)$，如图 1，要使解集中有 2 个整数，应有 $5<m\le 6$；

当 $m<3$ 时，$(x-3)(x-m)<0$ 的解集为 $(m,3)$，如图 2，要使解集中有 2 个整数，应有 $0\le m<1$；

综上所述，实数 m 的取值范围是 $[0,1)\cup(5,6]$.

答案： $[0,1)\cup(5,6]$

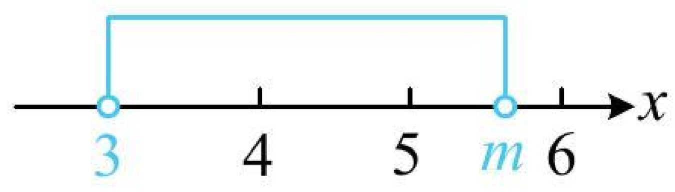


图1

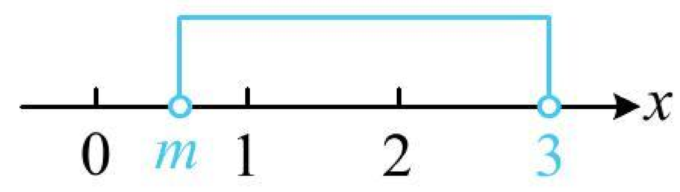


图2

【变式 2】若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x\mid -1<x<4\}$，则不等式 $b(x^2-1)+a(x+3)+c>0$ 的解集为_____.

解析： 由一元二次不等式的解集可推知对应的二次函数的大致图象，以及一元二次方程的根，

因为 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x\mid -1<x<4\}$，所以二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的大致图象如图，

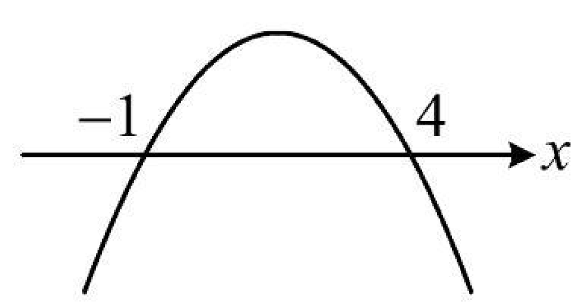
从而 $a<0$，且 -1 和 4 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，由韦达定理，有 $\begin{cases} -1+4=-\dfrac{b}{a} & ① \\ -1\times 4=\dfrac{c}{a} & ② \end{cases}$，

目标不等式中有 a，b，c 三个参数，可由上式将它们统一起来，判断出了 $a<0$，故统一成 a，

由①可得 $b=-3a$，由②可得 $c=-4a$，代入 $b(x^2-1)+a(x+3)+c>0$ 可得 $-3a(x^2-1)+a(x+3)-4a>0$，

两端同除以 $-a$ 整理得：$3x^2-x-2>0$，所以 $(3x+2)(x-1)>0$，解得：$x<-\dfrac{2}{3}$ 或 $x>1$.

答案： $\{x\mid x<-\dfrac{2}{3}$ 或 $x>1\}$



【总结】一元二次函数、方程、不等式三者是紧密联系的，从一方的条件，可以推知另外两方的结论.

类型Ⅲ：一元二次方程在某区间有实根

【例 4】方程 $ax^2+2x+1=0$ 在 $(1,2)$ 上有根，则实数 a 的取值范围为_____.

解析： 只说有根，没规定有几个根，若画二次函数图象来看，则需讨论较多的情况，故考虑参变分离，

$ax^2+2x+1=0 \Leftrightarrow ax^2=-2x-1 \Leftrightarrow a=-\dfrac{2x+1}{x^2}$，求出 $-\dfrac{2x+1}{x^2}$ 在 $(1,2)$ 上的值域，即为 a 的范围，

$-\dfrac{2x+1}{x^2}=-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}=-(\dfrac{1}{x}+1)^2+1$，由 $1<x<2$ 可得 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{x}<1$，

所以 $\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{x}+1<2$，从而 $\dfrac{9}{4}<(\dfrac{1}{x}+1)^2<4$，故 $-3<-(\dfrac{1}{x}+1)^2+1<-\dfrac{5}{4}$，所以 a 的取值范围是 $(-3,-\dfrac{5}{4})$.

答案： $(-3,-\dfrac{5}{4})$

【反思】若一元二次方程在某区间有根，但没说几个根，则考虑参变分离，再对变量一侧求值域即可.

类型Ⅳ：一元二次方程在某区间实根个数已知

【例 5】一元二次方程 $ax^2+5x+4=0$ 有一个正根和一个负根的充要条件是（　　）

（A）$a<0$　　（B）$a>0$　　（C）$a<-2$　　（D）$a>1$

解析：已经说了是一元二次方程，$a=0$ 的情况就无需考虑了，只是规定根的正负，判别式+韦达即可，

设原方程的两根分别为 x_1，x_2，由题意，$\begin{cases}\Delta=25-16a>0\\ x_1x_2=\dfrac{4}{a}<0\end{cases}$，解得：$a<0$.

答案： A

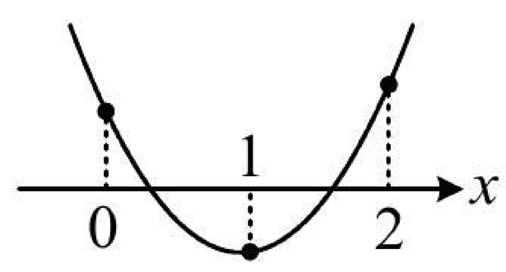
【变式 1】若关于 x 的方程 $x^2-(m+1)x+4m^2=0$ 在 $(0,1)$，$(1,2)$ 内各有一个实数根，则实数 m 的取值范围是_____.

解析：规定了两个区间上根的个数，考虑画二次函数的图象来分析，

设 $f(x)=x^2-(m+1)x+4m^2$，要使原方程在 $(0,1)$，$(1,2)$ 上各有 1 根，则 $f(x)$ 的大致图象应如图，

所以 $\begin{cases}f(0)=4m^2>0\\ f(1)=4m^2-m<0\\ f(2)=4m^2-2m+2>0\end{cases}$，解得：$0<m<\dfrac{1}{4}$.

答案： $(0,\dfrac{1}{4})$



【变式 2】方程 $ax^2-(a+2)x+4=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上有两个不相等的实根，则实数 a 的取值范围为_____.

解析：此处规定了给定区间上根的个数，故考虑画二次函数图象来看，但 a 的正负未定，得讨论开口，为了回避讨论，可在方程两端同除以 a，将平方项系数化 1，但需先考虑 $a=0$ 的情形，

当 $a=0$ 时，显然不合题意；当 $a\neq 0$ 时，$ax^2-(a+2)x+4=0 \Leftrightarrow x^2-\dfrac{a+2}{a}x+\dfrac{4}{a}=0$ ①，

设 $f(x)=x^2-\dfrac{a+2}{a}x+\dfrac{4}{a}$，要使方程①在 $(1,+\infty)$ 上有两个不相等的实根，函数 $f(x)$ 的大致图象应如图，

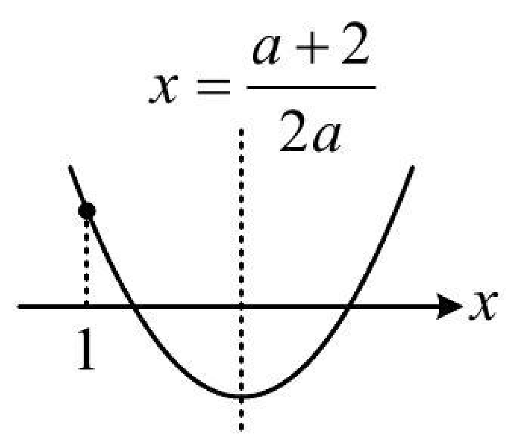
要让 $f(x)$ 的图象为如图所示的情形，需从判别式、对称轴、端点值三方面考虑，

所以$\begin{cases}\Delta=\dfrac{(a+2)^2}{a^2}-\dfrac{16}{a}>0 \quad ② \\ 对称轴x=\dfrac{a+2}{2a}>1 \quad ③ \\ f(1)=1-\dfrac{a+2}{a}+\dfrac{4}{a}>0 \quad ④\end{cases}$，将②化简得：$a^2-12a+4>0$，所以 $(a-6)^2>32$，故 $a<6-4\sqrt{2}$ 或 $a>6+4\sqrt{2}$，

由④可得 $\dfrac{2}{a}>0$，所以 $a>0$，从而③可化为 $a+2>2a$，故 $a<2$，于是 $0<a<2$，

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(0,6-4\sqrt{2})$.

答案：$(0,6-4\sqrt{2})$



【总结】若规定了一元二次方程在某区间上根的个数，则可画出二次函数的图象，再考虑判别式、对称轴、端点值，但有时只需考虑其中一两点即可，只要它能使图象成为我们需要的情形.

强化训练

1.（2023・全国模拟・★★）（多选）已知 a，b，c，d 均为实数，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $a>b$，$c>d$，则 $a-d>b-c$

（B）若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$

（C）若 $a>b$，$c>d>0$，则 $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

（D）若 $ab>0$，$bc-ad>0$，则 $\dfrac{c}{a}>\dfrac{d}{b}$

2.（2022・吉林模拟・★★★）（多选）已知实数 a，b，c 满足 $a<b<c$，且 $a+b+c=0$，则下列不等关系正确的是（　　）

（A）$ac<bc$　　（B）$\dfrac{1}{ab}>\dfrac{1}{bc}$　　（C）$ab^2<cb^2$　　（D）$\dfrac{c-a}{c-b}>1$

3.（2022 • 安徽模拟 • ★★）已知关于 x 的不等式 $(x-a)(x-2)>0$ 成立的一个充分不必要条件是 $-1<x<1$，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-1]$　（B）$(-\infty,0)$　（C）$[2,+\infty)$　（D）$[1,+\infty)$

4.（2023 • 江西模拟 • ★★）方程 $x^2-mx+1=0$ 在区间 $(-1,2)$ 上有根，则实数 m 的取值范围是_____.

5.（2022 • 成都七中模拟 • ★★★）（多选）关于 x 的方程 $x^2+(a-3)x+1=0$ 有两个不相等的大于 $\frac{1}{2}$ 的实数根的充分不必要条件可以是（　　）

（A）$\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}$　（B）$\frac{2}{3}<a<1$　（C）$\frac{1}{2}<a<1$　（D）$\frac{2}{3}<a\le 2$

6.（2022 • 广安模拟 • ★★★）若关于 x 的不等式 $x^2-2ax-7a^2<0$ 的解集为 (x_0,x_0+16)，则实数 $a=$_____.

7.（2023 • 湖南模拟 • ★★★）若函数 $f(x)=ax^2+(2-a)x-2$ 在 $(0,2)$ 上有且仅有 1 个零点，则实数 a 的取值范围是_____.

8．（2023·新高考Ⅱ卷·★★★）（多选）若函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\neq 0)$既有极大值也有极小值，则（　　）

（A）$bc>0$　　（B）$ab>0$　　（C）$b^2+8ac>0$　　（D）$ac<0$